

Машина жасау, технологиялық машиналар және көлік, құрылысDOI: <https://www.doi.org/10.53002/157>**REFINEMENT OF BEAM BENDING THEORIES: A SIMPLIFIED METHOD FOR STRUCTURAL ANALYSIS**¹*S. Akhazhanov*, ²*A. Kasenova*, ³*B. Kaldanova*¹*E. Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan*²*Karaganda Industrial University, Temirtau, Kazakhstan*³*Department of Civil Engineering, Karaganda Industrial University, Temirtau, Kazakhstan*** Corresponding author e-mail: kasenova.aigerim@mail.ru***Author information:****Akhazhanov S.** - Laboratory of Applied Mechanics and Robotics, E. Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan. E-mail: akhazhanov.S@karnu-buketov.edu.kz**Kasenova A.** - Department of Civil Engineering, Karaganda Industrial University, Temirtau, Kazakhstan. E-mail: kasenova.aigerim@mail.ru**Kaldanova B.** - Department of Civil Engineering, Karaganda Industrial University, Temirtau, Kazakhstan. E-mail: b.kaldanova@ttu.edu.kz

Abstract. This study develops a refined beam theory aimed at overcoming the limitations of classical models, such as the Euler–Bernoulli and Timoshenko beam theories. These classical models often neglect transverse shear deformation and rotary inertia effects, which become particularly important in the analysis of thick beams or beams made of advanced materials. The proposed theory considers a beam with a constant rectangular cross-section made of a linear elastic, homogeneous, and isotropic material. While retaining the simplicity and widely accepted principles of the classical Euler–Bernoulli theory, the proposed theory provides high accuracy in the bending analysis of beams. A simplified governing equation is formulated as a practical and efficient tool for engineering calculations. Analytical solutions are obtained for thick isotropic beams under various boundary conditions. The considered cases include simply supported, cantilever, and clamped beams subjected to uniformly and non-uniformly distributed loads. Explicit expressions are derived for transverse displacements, strain and stress components, as well as internal force resultants. The accuracy of the proposed theory is validated through comparison with advanced beam theories that account for transverse shear deformation. The results demonstrate that the proposed theory provides reliable predictions while reducing computational complexity. Furthermore, the applicability of the theory is demonstrated through representative numerical examples, confirming its effectiveness for the practical design and analysis of structures. The obtained results indicate that the proposed theory can improve the accuracy of engineering calculations, particularly in the analysis of thick beams and complex beam systems.

Keywords: refined beam theory; structural analysis; transverse displacement; longitudinal stress; transverse shear stress; thick beams; analytical solutions.

АРҚАЛЫҚТАРДЫҢ ИЛҮ ТЕОРИЯЛАРЫН НАҚТЫЛАУ: КОНСТРУКЦИЯЛАРДЫ ЕСЕПТЕУДІҢ ЖЕҢІЛДЕТІЛГЕН ӘДІСІ¹*Ахажанов С.Б.,* ²*Касенова А.Н.,* ³*Калданова Б.О.*¹*Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды ұлттық зерттеу университеті, Қарағанды, Қазақстан*²*Қарағанды индустриялық университеті, Теміртау, Қазақстан*³*Қарағанды индустриялық университеті, Теміртау, Қазақстан*** Автор-корреспондент e-mail: kasenova.aigerim@mail.ru***Авторлар туралы ақпарат:****Ахажанов С.Б.** - Қолданбалы механика және робототехника, Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды ұлттық зерттеу университеті, Қарағанды, Қазақстан. E-mail: akhazhanov.S@karnu-buketov.edu.kz**Касенова А.Н.** - Құрылыс кафедрасы, Қарағанды индустриялық университеті, Теміртау, Қазақстан. E-mail: kasenova.aigerim@mail.ru**Калданова Б.О.** - Құрылыс кафедрасы, Қарағанды индустриялық университеті, Теміртау, Қазақстан. E-mail: b.kaldanova@ttu.edu.kz

Аңдатпа. Бұл зерттеуде euler-bernoulli және тимошенко теориялары сияқты классикалық модельдердің шектеулерін жою мақсатында арқалықтардың нақтыланған теориясы әзірленді. Аталған классикалық модельдер көбінесе көлденең ығысу деформациясын және айналмалы инерция әсерлерін ескермейді. Бұл әсерлер қалың арқалықтарды немесе заманауи материалдардан жасалған арқалықтарды талдау кезінде ерекше маңызды. Ұсынылған теория көлденең қимасы тұрақты тікбұрышты пішінді, сызықтық серпімділі, біртекті және изотропты материалды қарастырады. Классикалық euler-bernoulli теориясының қарапайымдылығы мен кеңінен қолданылатын қағидаларын сақтай отырып, ұсынылған теория арқалықтардың иілуін талдау кезінде жоғары дәлдікті қамтамасыз етеді. Инженерлік есептеулер үшін тәжірибелік әрі тиімді құрал ретінде жеңілдетілген негізгі теңдеу тұжырымдалды. Өртүрлі шекаралық шарттар жағдайындағы қалың изотропты арқалықтар үшін аналитикалық шешімдер алынды. Қарастырылған жағдайларға шарнирлі тірелген, консольді және қатаң бекітілген арқалықтар жатады. Арқалықтарға біркелкі және біркелкі емес жүктемелер әсер етеді. Зерттеуде көлденең жылжулар, деформациялар мен кернеулер компоненттері, сондай-ақ ішкі күштік факторлар үшін айқын өрнектер ұсынылған. Ұсынылған теорияның дәлдігі ығысу деформациясын ескеретін заманауи теориялармен салыстыру арқылы расталды. Нәтижелер ұсынылған теорияның есептеу күрделілігін төмендеті отырып, сенімді нәтижелер беретінін көрсетті. Сонымен қатар, теорияның қолдану мүмкіндігі нақты есептік мысалдар арқылы көрсетіліп, оның конструкцияларды тәжірибелік жобалау мен талдаудағы тиімділігі дәлелденді. Алынған нәтижелер ұсынылған теорияның инженерлік есептеулерде, әсіресе қалың арқалықтар мен күрделі арқалықтық жүйелерді талдау кезінде, конструкцияларды есептеудің дәлдігін арттыруға мүмкіндік беретінін көрсетеді.

Түйін сөздер: нақтыланған арқалық теориясы; конструкцияларды талдау; көлденең жылжу; бойлық кернеу; көлденең ығысу кернеуі; қалың арқалықтар; аналитикалық шешімдер.

УТОЧНЕНИЕ ТЕОРИЙ ИЗГИБА БАЛОК: УПРОЩЁННЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА КОНСТРУКЦИЙ

¹Ахажанов С.Б., ²Касенова А.Н., ³Калданова Б.О.

¹ Карагандинский национальный исследовательский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

²Карагандинский индустриальный университет, Темиртау, Казахстан

³Карагандинский индустриальный университет, Темиртау, Казахстан

* Автор-корреспондент e-mail: kasenova.aigerim@mail.ru

Информация об авторах:

Ахажанов С.Б. - Лаборатория прикладной механики и робототехники, Карагандинский национальный исследовательский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан. E-mail: akhazhanov.S@karnu-buketov.edu.kz

Касенова А.Н. - Кафедра «Строительство», Карагандинский индустриальный университет, Темиртау, Казахстан. E-mail: kasenova.aigerim@mail.ru

Калданова Б.О. - Кафедра «Строительство», Карагандинский индустриальный университет, Темиртау, Казахстан. E-mail: b.kaldanova@tttu.edu.kz

Аннотация. В данном исследовании разработана уточнённая теория балок, направленная на устранение ограничений классических моделей, таких как теории Эйлера–Бернулли и Тимошенко. Указанные классические модели зачастую не учитывают деформации поперечного сдвига и эффекты вращательной инерции, которые приобретают особое значение при анализе толстых балок или балок, изготовленных из современных материалов. Предлагаемая теория рассматривает линейно-упругий, однородный и изотропный материал балки постоянного прямоугольного поперечного сечения. Сохраняя простоту и широко применяемые принципы классической теории Эйлера–Бернулли, предложенная теория обеспечивает высокую точность при анализе изгиба балок. В качестве практического и эффективного инструмента для инженерных расчётов сформулировано упрощённое основное уравнение. Получены аналитические решения для толстых изотропных балок при различных граничных условиях. Рассмотрены шарнирно опёртые, консольные и жёстко защемлённые балки, находящиеся под действием равномерно и неравномерно распределённых нагрузок. В исследовании представлены явные выражения для определения поперечных перемещений, компонентов деформаций и напряжений, а также внутренних силовых факторов. Точность предложенной теории подтверждена путём сравнения с современными теориями, учитывающими деформации поперечного сдвига. Полученные результаты показали, что предложенная теория обеспечивает надёжные результаты при снижении вычислительной сложности. Кроме того, применимость теории продемонстрирована на конкретных расчётных примерах, что подтверждает её эффективность для практического проектирования и анализа конструкций. Полученные результаты показывают, что предложенная теория может быть использована для повышения точности инженерных расчётов конструкций, особенно при анализе толстых балок и сложных балочных систем.

Ключевые слова: уточнённая теория балок; анализ конструкций; поперечное перемещение; продольное напряжение; касательное напряжение поперечного сдвига; толстые балки; аналитические решения.

ЖАЛПЫ ЕРЕЖЕЛЕР

Зерттеуде қалың изотропты арқалықтардың иілуін есептеуге арналған нақтыланған арқалық теориясы әзірленді. Теория негізінде жеңілдетілген негізгі теңдеу алынып, әртүрлі шекаралық шарттар мен жүктемелер үшін аналитикалық шешімдер ұсынылды. Көлденең жылжу, деформация, кернеу және ішкі күштік факторларды анықтауға арналған өрнектер алынды. Ұсынылған теорияның дәлдігі қолданыстағы ығысу деформациясын ескеретін теориялармен салыстыру арқылы тексерілді.

КІРІСПЕ

Арқалықтардың иілуін талдау құрылыс механикасы мен инженерлік жобалаудың негізгі аспектілерінің бірі болып табылады және әртүрлі жүктеме жағдайларындағы арқалықтардың мінез-құлқын түсінудің негізін құрайды. Euler-Bernoulli және Тимошенко модельдері сияқты классикалық теориялар ұзақ уақыт бойы иілу механикасын талдаудың сенімді негізін қамтамасыз етіп келеді [1–2]. Алайда бұл теориялар көлденең ығысу деформациясы мен айналмалы инерция әсерлерін ескермеу сияқты бірқатар жеңілдетуші болжамдарға негізделген. Бұл модельдер иілгіш арқалықтар үшін тиімді болғанымен, аталған шектеулер оларды қалың арқалықтарға немесе күрделі механикалық қасиеттері бар материалдарға қолдану мүмкіндігін төмендетеді. Осыған байланысты анағұрлым жетілдірілген модельдерді әзірлеу қажеттілігі туындайды.

Осы мәселелерді шешу үшін зерттеушілер жоғары ретті ығысу деформациясы теорияларын (HSDT) әзірледі. Бұл модельдер классикалық теориялардың бастапқы болжамдарынан асып, көлденең ығысу деформациясының әсерін дәлірек ескеру үшін қосымша мүшелерді қамтиды. Осы бағыттағы маңызды жетістіктерге Levinson [3], Shames және т.б. [4], Rehfield және Murty [5], Krishna Murty [6], Baluch, Azad, және Khidir [7], сондай-ақ Bhimaraddi and Chandrashekhar [8] ұсынған параболалық ығысу деформациясы теориялары жатады. Бұл теорияларда қалыңдық координатасы бойынша бойлық жылжулардың нақтыланған таралуы енгізіледі, соның нәтижесінде арқалықтың жоғарғы және төменгі беттерінде жанама кернеулердің нөлге тең болу шекаралық шарттары автоматты түрде қанағаттандырылады. Осыған байланысты ығысуға түзету коэффициенттерін қолдану қажеттілігі жойылып, арқалықтың деформациясын модельдеудің анағұрлым дәл тәсілі қамтамасыз етіледі.

Қалың немесе қысқа арқалықтарды талдау кезінде көлденең ығысу деформациясын ескерудің маңызы айқын байқалады. Иілгіш арқалықтармен салыстырғанда ығысу деформациясының әсері иілулердің едәуір артуына, орнықтылықты жоғалтудың қауіпті жүктемелерінің төмендеуіне және меншікті тербеліс жиіліктерінің азаюына әкелуі мүмкін. Бұл әсерлерді сандық бағалау үшін өлшемсіздендіруді қолдану маңызды, бұл Shimpri және т.б. [9] еңбегінде атап өтілген. Сонымен қатар, [10–12] зерттеулерінде деформацияның өзгеруін дәл болжауда көлденең ығысудың маңызды рөлі көрсетілген. Бірінші ретті

ығысу деформациясы теорияларының шектеулерін еңсеру мақсатында зерттеушілер жоғары ретті ығысу деформациясының көптеген теорияларын әзірледі [13–15]. Бұл теориялар арқалықтардың деформациясын дәлірек бағалауға мүмкіндік береді, алайда көбінесе қосымша басқарушы теңдеулер мен белгісіз функцияларды енгізуді талап етеді, нәтижесінде есептеу шығындары артады. Wang және т.б. [16] мұндай модельдердің күрделілігі олардың тәжірибелік қолданылуына кедергі келтіруі мүмкін екенін атап өтіп, дәлдік пен есептеу тиімділігі арасындағы тепе-теңдікті сақтаудың маңыздылығын көрсеткен.

Осы бағытты дамыта отырып, Ghugal және Sharma [17] статикалық және динамикалық талдау үшін гиперболалық ығысу деформациясы теориясын ұсынды, ал Ghugal және Dahake [18] және басқа зерттеушілер [19–20] әртүрлі жүктеме және бекіту жағдайларындағы иілу мінез-құлқын талдау үшін тригонометриялық модельдерді қолданды. Бұл әзірлемелер бұрынғы модельдердің шектеулерін еңсерудегі маңызды қадам болып табылады. Осы салаға елеулі үлес қосқан Canales және Mantari [21] әртүрлі шекаралық шарттар жағдайында қалың изотропты тікбұрышты арқалықтардың статикалық иілуін зерттеудің аналитикалық тәсілін әзірледі. Шекаралық үзілісті Фурье қатарларын ығысу деформациясы теорияларымен біріктіру арқылы олар кернеулер мен жылжулардың шешімдерін алды. Алайда олардың жұмысында кейбір аспектілер, атап айтқанда, қатаң бекітілген ұштардағы иілу және көлденең ығысу кернеулерінің таралуы толық зерттелмеген, бұл аталған тәсілді одан әрі жетілдіру мүмкіндігін көрсетеді.

Ghugal және Shimpri [22] және Sayyad және Ghugal [23] жүргізген кешенді шолулар ғылыми әдебиеттерде шарнирлі тірелген арқалықтар үшін Навье типті тұйық аналитикалық шешімдердің басым екенін көрсетеді. Қатаң бекітілген ұштары немесе арнайы жүктеме жағдайлары бар арқалықтарға арналған аналитикалық шешімдер әлі де шектеулі, бұл осы бағытта зерттеулерді жалғастыру және жаңа тәсілдерді әзірлеу қажеттілігін көрсетеді. Сонымен қатар, көлденең жылжуларды жеке құрамдастарға бөлу сияқты балама әдістемелер де ұсынылған. [24–25] зерттеулерінде динамикалық есептер үшін инерциялық байланысқан, ал статикалық есептер үшін ажыратылған екі басқарушы теңдеуден тұратын жүйе ұсынылған. Осыған ұқсас тәсілдер [26–29] еңбектерінде де қарастырылып, ығысу деформациясына байланысты есептерді шешуге жаңа көзқарас ұсынады. Ығысу әсерінен болатын шектеуге төзімді ақырлы элементтерді әзірлеуге де айтарлықтай зерттеулер жүргізілді [30–31]. Соңғы зерттеулер [32–39] ығысу деформациясы теорияларының үздіксіз дамып келе жатқанын көрсетіп, олардың заманауи конструкциялық талдаудағы өзектілігін айқындайды. Бұл жетістіктер зерттеу бағытының белсенді дамуын қамтамасыз етеді, өйткені ғалымдар қолданыстағы модельдерді үнемі жетілдіріп, олардың күрделі инженерлік есептерге қолдану аясын кеңейтуде.

Болашақ зерттеулерде бұл жеңілдетілген теорияны қолдану аясын кеңейтуге болады. Ол серпімділігі негіздегі арқалықтардың мінез-құлқын талдау үшін

берік негіз болып табылады [40–42]. Оны қолдану есептеу тиімділігін сақтай отырып, негіздің қаттылығын және арқалық пен негіздің өзара әрекеттесу әсерлерін ескеру сияқты күрделі конструкциялық мәселелерді шешуге мүмкіндік береді. Сонымен қатар, теорияны біртекті емес негіздер немесе динамикалық жүктеме жағдайлары сияқты күрделі жағдайларды зерттеуге бейімдеуге болады.

Бұл жұмыстың мақсаты – классикалық теорияның кемшіліктерін ескеретін нақтыланған теорияны әзірлеу және негізгі тәуелділіктерді қарапайым әрі тәжірибелік түрде, инженерлік есептеулерде іске асыруға ыңғайлы түрде ұсыну. Теориялық тұжырымдар тікбұрышты көлденең қимасы бар жазық элементтер үшін жүргізілді. Алайда геометриялық сипаттамаларды өзгерту арқылы ұсынылған теорияны көлденең қимасы кез келген пішіндегі элементтерге қолдануға болады. Қатаң бекітілген шекаралық шарттары бар арқалықтардың статикалық иілуіне арналған аналитикалық шешімдер алынды. Ұсынылған теорияның тиімділігін көрсету мақсатында ығысу деформациясы ескерілетін изотропты тікбұрышты арқалықтардың статикалық иілуіне арналған есептік мысалдар келтірілді. Сандық нәтижелер басқа нақтыланған теориялар негізінде алынған нәтижелермен салыстырылды. Бұл ұсынылған тәсілдің дәлдігі мен сенімділігін растауға мүмкіндік береді.

ТЕОРИЯНЫҢ НЕГІЗГІ БОЛЖАМДАРЫ

Ұсынылған модельдің теориялық тұжырымдамасының негізінде жатқан болжамдар төмендегідей:

1) 1-суретте көрсетілген қарастырылып отырған арқалық $0 - x_1 - x_2 - x_3$ декарттық координаталар жүйесінде орналасқан және келесі аумақты қамтиды:

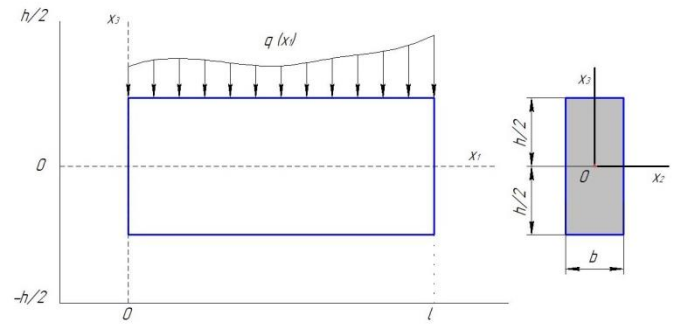
$$0 \leq x_1 \leq l, -\frac{b}{2} \leq x_2 \leq \frac{b}{2}, -z \leq x_3 \leq z, z = \frac{h}{2}$$

мұндағы, x_1, x_2 және x_3 декарттық координаталар, ал l және b сәйкесінше x_1 - және x_2 бағыттарындағы арқалықтың ұзындығы мен ені. x_3 өсі бойындағы арқалықтың қалыңдығы h арқылы белгіленеді.

2) Арқалық біртекті, сызықтық серпімділі, изотропты материалдан тұрады, ал оған түсірілген жүктемелер статикалық болып табылады және арқалықтың ұзындығы бойымен біркелкі немесе біркелкі емес таралады.

3) Арқалықтың шекаралық шарттары $x_1=0$ және $x_1=l$, шеттерінде беріледі, мұнда вариациялық тұрғыдан келісілген шекаралық шарттар қолданылады.

4) x_3 өсі бойындағы деформациялар мен кернеулердің таралуы берілген заңдылықтарға сәйкес өзгереді және нақтыланған арқалық теориясының қағидаларымен сәйкестікті қамтамасыз етеді.



1-Сурет. Арқалықтың геометриясы және координаттар жүйесі.

5) Көлденең ығысу деформациясы берілген функцияға сәйкес өзгереді, бұл оның қалыңдық координатасына тәуелділігін ескеруге мүмкіндік береді.

6) Көлденең жылжулар U_1 компоненті созылу немесе сығылу деформациясына ұшырамайды, бұл арқалықтың осьтік жұмыс істеу сипатын сақтауды қамтамасыз етеді.

ҚОЛДАНЫСТАҒЫ ТЕОРИЯ: ЖЫЛЖУ ФУНКЦИЯСЫ, ДЕФОРМАЦИЯЛАР, КЕРНЕУЛЕР, КӨЛДЕНЕҢ ҚИМАНЫҢ ИІЛУ МОМЕНТІ ЖӘНЕ КӨЛДЕНЕҢ КҮШ

Теорияны әзірлеу

Нақты қойылымдағы кернеулік-деформациялық күй серпімділік теориясының келесі қатынастары арқылы анықталады [1, 2]:

- Кернеу компоненттері арқылы өрнектелген тепе-теңдік теңдеулері:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} + Z = 0, \quad (1)$$

мұндағы σ_1, σ_3 сәйкес координаталық осьтер

бойымен бағытталған қалыпты кернеулер; X_1, X_3, τ_{13} сәйкес осьтерге перпендикуляр жазықтықтарда әсер ететін жанама кернеулер, X, Z координаталық бағыттар бойымен әсер ететін көлемдік күштердің компоненттері. Кинематикалық қатынастар (Коши):

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial U_3}{\partial x_3}, \quad \gamma_{13} = \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1}, \quad (2)$$

мұндағы $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ сызықтық деформациялар, ығысу деформациялар, ал U_1, U_3 - x_1, x_3 сәйкес координаталық осьтер бойындағы жылжулар компоненттері. Физикалық қатынастар (Гук заңы):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu \sigma_3), \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu \sigma_1), \quad (3)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

мұндағы E серпімділік модулі, және ν Пуассон коэффициенті. Бұл теория кернеулер мен жылжулардың интегралдық сипаттамаларына негізделген

$$\begin{aligned}
M &= \int_{-z}^z \sigma_1 x_3 dx_3, \quad Q = \int_{-z}^z \tau_{13} dx_3, \\
M_\sigma &= \int_{-z}^z \sigma_3 x_3 dx_3, \quad N = \int_{-z}^z \sigma_1 dx_3, \\
N_\sigma &= \int_{-z}^z \sigma_3 dx_3, \quad W_0 = \frac{1}{h} \int_{-z}^z U_3 dx_3, \\
\theta &= \frac{U_1^+ - U_1^-}{h} = \frac{12}{h^3} \int_{-z}^z U_1 \cdot x_3 \cdot dx_3,
\end{aligned} \quad (4)$$

мұндағы M_σ , N_σ қалыпты кернеуінен σ_3 туындайтын иілу моменті мен бойлық күш, N бойлық күш, W_0 , θ қалыпты жылжу және көлденең қиманың бұрылу бұрышы, U_1^+ , U_1^- тиісінше $U_1(x_1, x_3)$ $x_3=z$ және $x_3=-z$ осьтрі бойындағы көлденең жылжулар

(1) теңдеуін интегралдау және көлемдік күштер болмаған жағдайда (4) қатынасын ескеру арқылы ішкі күштер түріндегі тепе-теңдік теңдеулерін аламыз:

$$\frac{dM}{dx_1} - Q = 0, \quad \frac{dQ}{dx_1} + q = 0, \quad q = \sigma_3|_{-z}^z \quad (5)$$

Осылайша, Гук заңынан (3) және (4) белгілеулерін ескере отырып, келесі өрнектер алынады:

$$\begin{aligned}
M &= EJ \frac{d\theta}{dx_1} + \nu M_\sigma, \quad Q = A(\theta + \frac{dW_0}{dx_1}), \\
J &= \frac{bh^3}{12}, \quad A = Gh,
\end{aligned} \quad (6)$$

мұндағы EJ иілу қатаңдығы, ал A ығысу қатаңдығын білдіреді.

(6) өрнектерін (5) жүйесінің бірінші теңдеуіне қойсақ, келесі өрнекті аламыз:

$$EJ \frac{d^2\theta}{dx_1^2} + \nu \frac{dM_\sigma}{dx_1} - A(\theta + \frac{dW_0}{dx_1}) = 0 \quad (7)$$

(7) теңдеуін операторлық түрде қайта жазуға болады:

$$\begin{aligned}
L(\theta) - \frac{d}{dx_1}(P) &= 0, \\
L(\theta) &= \frac{EJ}{A} \frac{d^2\theta}{dx_1^2} - \theta, \quad P = W_0 - \nu \frac{M_\sigma}{A},
\end{aligned} \quad (8)$$

мұндағы L сызықтық оператор.

(8) теңдеуінің шешімін келесі түрде өрнектеуге болады:

$$\theta = -\frac{\frac{dP}{dx_1}}{L},$$

Осыдан жылжулар компоненттерін аламыз:

$$P = W - \frac{EJ}{A} \frac{d^2W}{dx_1^2}, \quad \theta = -\frac{dW}{dx_1} \quad (9)$$

(5) жүйесінің екінші теңдеуінен (6) және (9) өрнектерін ескере отырып, $W(x_1)$ функциясын анықтауға арналған негізгі теңдеу алынады:

$$EJ \frac{d^4W}{dx_1^4} = q + \nu \frac{d^2M_\sigma}{dx_1^2} \quad (10)$$

Гук заңының (3) пайдаланылмаған теңдеуін интегралдау және (4) қатынастарын ескеру арқылы келесіні аламыз:

$$U_3^+ + U_3^- = 2W_0 - \frac{2J\nu}{h} \frac{d\theta}{dx_1} + \frac{2(1-\nu^2)}{Eh} M_\sigma \quad (11)$$

Сол заңның тағы бір интегралы келесі түрде жазылады:

$$\begin{aligned}
\int_{-z}^z \varepsilon_3 dx_3 &= \frac{1}{E} \int_{-z}^z (\sigma_3 - \nu \sigma_1) dx_3, \\
U_3^+ - U_3^- &= \frac{1}{E} (N_\sigma - \nu N),
\end{aligned} \quad (12)$$

мұндағы U_3^+ , U_3^- сәйкесінше $U_3(x_1, x_3)$ $x_3=z$ және $x_3=-z$ осьтері бойындағы тік жылжулар.

(11) және (12) өрнектерінен U_3^+ және U_3^- жылжулар анықталады. Классикалық Euler-Bernoulli аркалықтар теориясы шенберінде кернеулерді келесідей көрсетуге болады [1]:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{x_3}{J} M, \quad \sigma_3 = \delta(x_3) q, \quad \tau_{13} = \frac{h^2 f(x_3)}{J} Q, \\
f(x_3) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \frac{x_3^2}{h^2}, \quad \delta(x_3) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x_3}{h} - 2 \frac{x_3^3}{h^3},
\end{aligned} \quad (13)$$

мұндағы $f(x_3)$ көлденең жанама кернеулердің таралу функциясы, ал $\delta(x_3)$ қалыпты көлденең кернеулердің таралу функциясы. σ_3 кернеуін (13) түрінде қабылдай отырып, келесіні аламыз:

$$M_\sigma = \frac{h^2}{10} \cdot q, \quad N_\sigma = \frac{qh}{2}$$

Жылжулар өрісі:

А Жоғарыда келтірілген болжамдар мен алынған нәтижелер негізінде қарастырылып отырған аркалық теориясындағы жылжулар өрісі келесі түрде анықталады:

$$\begin{aligned}
U_1(x_1, x_3) &= -x_3 \frac{dW}{dx_1} = x_3 \theta, \\
U_3^+(x_1) &= W(x_1) + \frac{J}{h} \left(\nu - \frac{Eh}{A} \right) \frac{d^2 W}{dx_1^2} + \\
&+ \frac{qh^2}{10} \left[\frac{\nu}{A} + \frac{(1-\nu^2)}{Eh} \right] + \frac{qh}{4E}, \\
U_3^-(x_1) &= W(x_1) + \frac{J}{h} \left(\nu - \frac{Eh}{A} \right) \frac{d^2 W}{dx_1^2} + \\
&+ \frac{qh^2}{10} \left[\frac{\nu}{A} + \frac{(1-\nu^2)}{Eh} \right] - \frac{qh}{4E}, \\
W_0(x_1) &= W - \frac{EJ}{A} \frac{d^2 W}{dx_1^2} + \nu \frac{qh^2}{10A}, \quad \theta = -\frac{dW}{dx_1},
\end{aligned} \quad (14)$$

мұндағы $W(x_1)$ иілу функциясы, G арқалық материалының ығысу модулі, q сыртқы жүктеменің қарқындылығы.

Деформацияларға арналған өрнектер

Сызықтық серпімділік теориясы шеңберінде (13) және (14) теңдеулерімен сипатталатын жылжулар өрісінен алынған қалыпты және ығысу деформациялары келесідей өрнектеледі:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -x_3 \frac{d^2 W}{dx_1^2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{(1-\nu)}{E} \delta(x_3) q + \nu x_3 \frac{d^2 W}{dx_1^2}, \\
\gamma_{13} &= \frac{h^2 f(x_3)}{GJ} Q, \quad \gamma_{13}^0 = \frac{1}{h} \int_{-z}^z \gamma_{13} dx_3 = \theta + \frac{dW_0}{dx_1}.
\end{aligned} \quad (15)$$

Кернеулерге арналған теңдеулер

Қалыпты иілу кернеулері мен көлденең ығысу кернеулері (13) және (15) бірлестірімі физикалық тәуелділіктерді пайдалана отырып анықталады және келесідей өрнектеледі:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= -Ex_3 \frac{d^2 W}{dx_1^2} + \nu \delta(x_3) q, \\
\sigma_3 &= \delta(x_3) q, \quad \tau_{13} = \frac{h^2 f(x_3)}{J} Q
\end{aligned} \quad (16)$$

Қима бойынша иілу моменті көлденең күшке арналған өрнектер

Арқалықтың көлденең қимасындағы иілу моменті мен көлденең күш келесідей анықталады:

$$\begin{aligned}
M &= -EJ \frac{d^2 W}{dx_1^2} + \nu \frac{qh^2}{10}, \\
Q &= -EJ \frac{d^3 W}{dx_1^3} + \frac{\nu h^2}{10} \frac{dq}{dx_1},
\end{aligned} \quad (17)$$

мұндағы M , Q сәйкесінше иілу моменті және көлденең күш.

Негізгі дифференциалдық теңдеу және шекаралық шарттар

(17) теңдеудің екінші теңдеуін (5) теңдеудің екінші теңдеуіне қойып, негізгі теңдеуді аламыз:

$$EJ \frac{d^4 W}{dx_1^4} = q + \frac{\nu h^2}{10} \frac{d^2 q}{dx_1^2} \quad (18)$$

Оған сәйкес келетін үйлесімді табиғи шекаралық шарттар келесі түрде жазылады:

1) Егер арқалықтың ұштары шарнирлі тірелген болса, шекаралық шарттар келесідей болады:

$$W = 0, \quad M = 0 \quad (19)$$

2) Егер арқалықтың ұштары қатаң бекітілген болса, шекаралық шарттар келесідей болады:

$$W = 0, \quad \theta = 0 \quad (20)$$

3) Егер арқалықтың ұштары еркін бекітілген болса, шекаралық шарттар келесідей болады:

$$M = 0, \quad Q = 0 \quad (21)$$

Осылайша, ұсынылған нақтыланған теория арқалықтың кернеулік-деформациялық күйін анықтауға мүмкіндік береді, арқалықтарды классикалық иілу теориясындағы қайшылықтарды жояды және осылайша есептеулерді нақтыланған қойылымда жүргізуге мүмкіндік береді.

Арқалықты есептеу алгоритмі.

Ұсынылған нақтыланған теория бойынша кез келген арқалықты есептеу келесі алгоритм бойынша жүзеге асырылады:

1) Арқалықтың иілу функциясы (18) теңдеуін (19)-(21) теңдеулерінде келтірілген шекаралық шарттардың бірін қанағаттандыру арқылы шешу нәтижесінде анықталады.

2) Жылжулар компоненттері (14) формула бойынша есептеледі.

3) Деформация компоненттері (15) формула бойынша есептеледі.

4) Кернеу компоненттері (16) формула бойынша анықталады.

5) Арқалықтағы ішкі күштер (17) формулаға сәйкес есептеледі.

САНДЫҚ НӘТИЖЕЛЕР

Бұл бөлімде ығысу деформациясын ескеретін изотропты призмалық тікбұрышты арқалықтардың статикалық иілуіне қатысты сандық нәтижелер берілген. Нәтижелер кестелік түрде де, графикалық түрде де ұсынылған.

Арқалық үшін өлшемсіз жылжу W , өлшемсіз бойлық қалыпты кернеу σ_1 , және өлшемсіз көлденең жанама кернеу τ_{13} келесідей анықталады:

$$\bar{W} = \frac{WEJ}{q_0 l^4}, \quad \bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1 b}{q_0}, \quad \bar{\tau}_{13} = \frac{\tau_{13} b}{q_0} \quad (22)$$

1-3 мысалдар үшін ұсынылған теорияны пайдала отырып, арқалық қалыңдығының оның ұзындығына қатынасының (h/l) әртүрлі мәндері кезінде есептелген $\bar{W}$, $\bar{\sigma}_1$ және $\bar{\tau}_{13}$ үшін сандық нәтижелер 1-7 кестелерде келтірілген. Ұсынылған тәсілдің әсілдің тиімділігін көрсету мақсатында алынған нәтижелер келесі теориялар бойынша алынған сәйкес мәндермен салыстырылады: серпімділік екіөлшемді теориясымен, арқалықтың бірпараметрлі теориясымен, екіпараметрлі теориясымен, Levinson арқалығының теориясымен, Тимошенко арқалығының теориясымен, Euler-Bernoulli арқалығының теориясымен.

1-7-кестелерде және 2-7-суреттерде келтірілген нәтижелерді алу кезінде келесі жағдайлар ескерілді:

1) Пуассон коэффициенті 0.3 деп қабылданады.

2) 1 және 2-мысалдар үшін арқалықтың ұзындығы тұрақты болып $l=1\text{м}$, ал ені $b=1\text{м}$ деп қабылданады. Арқалықтың биіктігі (h) өзгермелі болып, келесі мәндер қабылданады: $h=0.01\text{м}$, $h=0.05\text{м}$, $h=0.10\text{м}$ және $h=0.15\text{м}$. Сәкесінше, арқалық биіктігінің оның ұзындығына қатынасы (h/l) келесі мәндерге тең 0.01, 0.05, 0.10, және 0.15. 3 мысалда арқалықтың биіктігі $h=1\text{м}$ және ені $b=1\text{м}$ тұрақты деп қабылданды. Арқалықтың ұзындығы (l) өзгермелі болып, келесі мәндер қабылданды: $l=4\text{м}$ және $l=10\text{м}$. Сәйкесінше, ұзындықтың қалыңдыққа қатынасы ($S=l/h$) 4 және 10 мәндерге тең деп қабылданды.

3) Levinson арқалығының теориясы мен бірпараметрлі арқалық теориясы негізінде алынған $\bar{W}$, сондай-ақ бірпараметрлі арқалық теориясы негізінде алынған $\bar{\sigma}_1$ және $\bar{\tau}_{13}$ бойынша сандық нәтижелер Shimpri және т.б. еңбегінде келтірілген [9].

4) $\bar{W}$, $\bar{\sigma}_1$, және $\bar{\tau}_{13}$ үшін серпімділіктің екіөлшемді теориясын (жазық кернеулі күй), екіпараметрлі теорияны, Тимошенко арқалығының теориясын және Bernoulli-Euler арқалығының теориясын пайдалана отырып алынған сандық нәтижелер авторлар [37] тарапынан есептелген.

а) Бұл есептеулерді жүргізу үшін кестелерде көрсетілген тиісті әдебиеттерде келтірілген өрнектер пайдаланылды.

б) Тимошенко арқалығының теориясында ығысуға түзету коэффициенті $\sqrt{5/6}$ мәніне тең деп қабылданды.

1-мысал. Біркелкі таралған көлденең жүктеме әсеріндегі шарнирлі тірелген арқалық (SS арқалық) Бұл мысалда арқалықтың $x_1=0$ және $x_1=l$ нүктелеріндегі ұштары шарнирлі тірелген. SS арқалығына сәйкес W үшін шекаралық шарттар келесідей болады:

1. Арқалықтың $x_1=0$ ұшындағы шекаралық шарттар:

$$W(0) = 0, \quad M(0) = -EJ \frac{d^2 W}{dx_1^2} + \nu \frac{qh^2}{10} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (23)$$

2. Арқалықтың $x_1=l$ ұшындағы шекаралық шарттар:

$$W(l) = 0, \quad M(0) = -EJ \frac{d^2 W}{dx_1^2} + \nu \frac{qh^2}{10} \Big|_{x_1=l} = 0 \quad (24)$$

1-кесте. 1-мысал үшін өлшемсіз көлденең жылжу ($\bar{W}$) (шарнирлі тірелген арқалық, 1-сурет), ұсынылған теория бойынша есептелген және (h/l) әртүрлі мәндер үшін белгілі нәтижелермен салыстырылған $\nu=0.3$

Теориялар	Өлшемсіз көлденең жылжу кезінде $x = l/2, \quad \bar{W} = WEJ/(q_0 l^4)$			
	(Жақшадағы мәндер пайыздық айырмашылықты көрсетеді)			
	$h/l = 0.01$	$h/l = 0.05$	$h/l = 0.10$	$h/l = 0.15$
Ұсынылған	0.01302 (0.00 %)	0.01308 (-0.15 %)	0.01329 (-0.22 %)	0.01364 (-0.37 %)

Bernoulli-Euler [4]	0.01302 (0.00 %)	0.01302 (-0.61 %)	0.01302 (-2.25 %)	0.01302 (-4.89 %)
Тимошенко [4]	0.01302 (0.00 %)	0.01310 (0.00 %)	0.01335 (0.23 %)	0.01375 (0.44 %)
Levinson [9]	0.01302 (0.00 %)	0.01310 (0.00 %)	0.01335 (0.23 %)	-
Бірпараметрлі теория [9]	0.01302 (0.00 %)	0.01310 (0.00 %)	0.01335 (0.23 %)	-
Екіпараметрлі теория [37]	0.01302 (0.00 %)	0.01310 (0.00 %)	0.01335 (0.23 %)	0.01375 (0.44 %)
Серпімділік теориясы [43]	0.01302	0.01310	0.01332	0.01369

2-кесте. 1- мысал үшін өлшемсіз осьтік кернеу ($\bar{\sigma}_1$) ұсынылған теория бойынша есептелген және әртүрлі мәндері үшін қолданыстағы нәтижелермен салыстырылған $\nu=0.3$

Теориялар	Өлшемсіз осьтік кернеу кезінде $x = l/2, z = h/2, \quad \bar{\sigma}_1 = (\sigma_1 b)/q_0$			
	(Жақшадағы мәндер пайыздық айырмашылықты көрсетеді)			
	$h/l = 0.01$	$h/l = 0.05$	$h/l = 0.10$	$h/l = 0.15$
Ұсынылған	7500.12 (0.00 %)	300.12 (0.00 %)	75.12 (0.00 %)	33.45 (0.00 %)
Bernoulli-Euler [4]	7500.00 (0.00 %)	300.00 (-0.07 %)	75.00 (-0.27 %)	33.33 (-0.60 %)
Тимошенко [4]	7500.00 (0.00 %)	300.00 (-0.07 %)	75.00 (-0.27 %)	33.33 (-0.60 %)
Бірпараметрлі теория [9]	7500.00 (0.00 %)	300.26 (0.02 %)	75.26 (0.08 %)	-
Екіпараметрлі теория [37]	7500.26 (0.00 %)	300.26 (0.02 %)	75.26 (0.08 %)	33.59 (0.18 %)
Серпімділік теориясы [43]	7500.20	300.20	75.20	33.53

3-кесте. 1 -мысал үшін өлшемсіз жанама кернеу ($\bar{\tau}_{13}$) (шарнирлі тірелген арқалық, 1-сурет) ұсынылған теория бойынша есептелген және $\nu=0.3$ қолданыстағы нәтижелермен салыстырылған.

Теориялар	Өлшемсіз жанама кернеу кезінде $x = 0, z = h/2, \quad \bar{\tau}_{13} = (\tau_{13} b)/q_0$			
	(Жақшадағы мәндер пайыздық айырмашылықты көрсетеді)			
	$h/l = 0.01$	$h/l = 0.05$	$h/l = 0.10$	$h/l = 0.15$
Ұсынылған	75.00 (0.00 %)	15.00 (0.00 %)	7.50 (0.00 %)	5.00 (0.00 %)
Bernoulli-Euler [4]	75.00 (0.00 %)	15.00 (0.00 %)	7.50 (0.00 %)	5.00 (0.00 %)
Тимошенко [4]	50.00 (-33.33 %)	10.00 (-33.33 %)	5.00 (-33.33 %)	3.33 (-33.33 %)
	75.00	15.00	7.50	-

Бірпараметрлі теория [9]	(0.00 %)	(0.00 %)	(0.00 %)	
Екіпараметрлі теория [37]	74.92 (-0.11 %)	14.92 (-0.53 %)	7.42 (-1.07 %)	4.92 (-1.60 %)
Серпімділік теориясы [43]	75.00	15.00	7.50	5.00

2-мысал: Біркелкі таралған көлденеі жүктеме әсеріндегі консольді арқалық (FC арқалық) Бұл мысалда арқалықтың $x_1=0$ нүктесіндегі шеті еркін, ал $x_1=l$ нүктесіндегі шеті қатаң бекітілген. FC – арқалыққа сәйкес W үшін шекаралық шарттар келесідей болады:

1. Арқалықтың $x_1=0$ шетіндегі шекаралық шарттар:

$$M(0) = -EJ \frac{d^2 W}{dx_1^2} + \nu \frac{qh^2}{10} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad (25)$$

$$Q(0) = -EJ \frac{d^3 W}{dx_1^3} + \frac{\nu h^2}{10} \cdot \frac{dq}{dx_1} \Big|_{x_1=0} = 0$$

2. Арқалықтың $x_1=l$ шетіндегі шекаралық шарттар:

$$W(l) = 0, \quad \theta = -\frac{dW}{dx_1} \Big|_{x_1=l} = 0 \quad (26)$$

4-кесте. 2-мысал үшін өлшемсіз көлденең жылжу ($\bar{W}$) (консольді арқалық, 1-сурет), ұсынылған теория бойынша анықталған және $\nu=0.3$ үшін қолданыстағы нәтижелермен салыстырылған.

Теориялар	Өлшемсіз көлденең жылжу кезінде $x=0, \bar{W} = WEJ / (q_0 l^4)$			
	(Жақшадағы мәндер пайыздық айырмашылықты көрсетеді)			
	$h/l = 0.01$	$h/l = 0.05$	$h/l = 0.10$	$h/l = 0.15$
Ұсынылған	0.12500 (-0.02 %)	0.12545 (-0.06 %)	0.12690 (-0.13 %)	0.12858 (-0.82 %)
Bernoulli-Euler [2, 4]	0.12500 (-0.02 %)	0.12500 (-0.41 %)	0.12500 (-1.62 %)	0.12500 (-3.58 %)
Timoshenko [3, 4]	0.12501 (-0.01 %)	0.12533 (-0.15 %)	0.12630 (-0.60 %)	0.12793 (-1.32 %)
Levinson [9]	0.12502 (0.00 %)	0.12549 (-0.02 %)	0.12695 (-0.09 %)	-
Бірпараметрлі теория [9]	0.12502 (0.00 %)	0.12549 (-0.02 %)	0.12695 (-0.09 %)	-
Екіпараметрлі теория [37]	0.12501 (-0.01 %)	0.12533 (-0.15 %)	0.12630 (-0.60 %)	0.12793 (-1.32 %)
Серпімділік теориясы [43]	0.12502	0.12552	0.12706	0.12964

5-кесте. 2-мысал үшін өлшемсіз осьтік кернеу ($\bar{\sigma}_1$) (консольді арқалық, 1-сурет) ұсынылған теория бойынша анықталған және $\nu=0.3$ үшін қолданыстағы нәтижелермен салыстырылған.

Теориялар	Өлшемсіз осьтік кернеу кезінде $x=l, z=h/2, \bar{\sigma}_1 = (\sigma_1 b) / q_0$			
	(Жақшадағы мәндер пайыздық айырмашылықты көрсетеді)			
	$h/l = 0.01$	$h/l = 0.05$	$h/l = 0.10$	$h/l = 0.15$

Ұсынылған	-29999.88 (0.00 %)	-1199.88 (0.01 %)	-299.88 (0.03 %)	-133.21 (0.06 %)
Bernoulli-Euler [2, 4]	-30000.00 (0.00 %)	-1200.00 (0.02 %)	-300.00 (0.07 %)	-133.33 (0.15 %)
Тимошенко [3, 4]	-30000.00 (0.00 %)	-1200.00 (0.02 %)	-300.00 (0.07 %)	-133.33 (0.15 %)
Бірпараметрлі теория [9]	-29999.74 (0.00 %)	-1199.74 (-0.01 %)	-299.74 (-0.02 %)	-
Екіпараметрлі теория [37]	-30000.00 (0.00 %)	-1200.00 (0.02 %)	-300.00 (0.07 %)	-133.33 (0.15 %)
Серпімділік теориясы [43]	-29999.80	-1199.80	-299.80	-133.13

6-кесте. 2-мысал үшін өлшемсіз жанама кернеу ($\bar{\tau}_{13}$) (консольді арқалық, 1-сурет) ұсынылған теория бойынша анықталған және $\nu=0.3$ үшін қолданыстағы нәтижелермен салыстырылған.

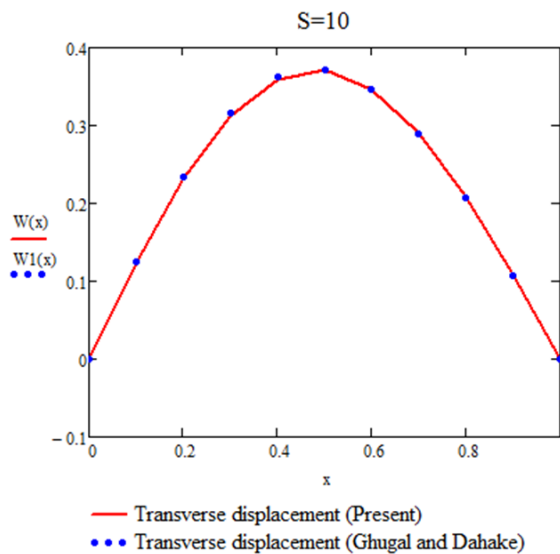
Теориялар	Өлшемсіз жанама кернеу кезінде $x=l, z=0, \bar{\tau}_{13} = (\tau_{13} b) / q_0$			
	(Жақшадағы мәндер пайыздық айырмашылықты көрсетеді)			
	$h/l = 0.01$	$h/l = 0.05$	$h/l = 0.10$	$h/l = 0.15$
Ұсынылған	-150.00 (0.00 %)	-30.00 (0.00 %)	-15.00 (0.00 %)	-10.00 (0.00 %)
Bernoulli-Euler [2, 4]	-150.00 (0.00 %)	-30.00 (0.00 %)	-15.00 (0.00 %)	-10.00 (0.00 %)
Тимошенко [3, 4]	-100.00 (-33.33 %)	-20.00 (-33.33 %)	-10.00 (-33.33 %)	-6.67 (-33.33 %)
Бірпараметрлі теория [9]	-150.00 (0.00 %)	-30.00 (0.00 %)	-15.00 (0.00 %)	-
Екіпараметрлі теория [37]	-149.92 (-0.05 %)	-29.92 (-0.27 %)	14.92 (-0.53 %)	-9.92 (-0.80 %)
Серпімділік теориясы [43]	-150.00	-30.00	-15.00	-10.00

3-мысал: Өзгермелі жүктеме әсеріндегі шарнирлі тірелген арқалық. Шарнирлі тірелген арқалық сол жақ тіректен басталып, $x_1=0$ және $x_1=l$, нүктелерінде тіреледі. оның ұзындығы бойымен $q(x_1) = q_0(1 - \frac{x_1}{l})$ өзгермелі жүктеме әсер етеді. W үшін шекаралық шарттар (23) және (24) өрнектерімн анықталады.

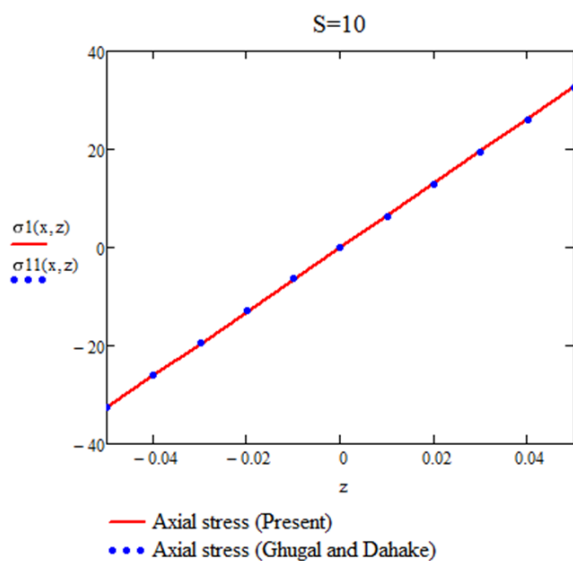
7-кесте. 3-мысал үшін өлшемсіз көлденең жылжу ($\bar{W}$) $x=0.25l, z=0$, сезінде осьтік кернеу ($\bar{\sigma}_1$), $x=0.25l, z=h/2$ кезінде жанама кернеу ($\bar{\tau}_{13}$), $x=0, z=0$ (шарнирлі тірелген арқалық, 1-сурет), ұсынылған теория бойынша есептелген $\nu=0.3$ және үшін қолданыстағы нәтижелермен салыстыру

Дереккөздер	$\bar{W}$		$\bar{\sigma}_1$		$\bar{\tau}_{13}$	
	S=4	S=10	S=4	S=10	S=4	S=10
Ұсынылған	0.6865	0.5979	5.4456	32.7212	2.0000	5.0000
Bernoulli-Euler [4]	0.5811	0.5811	5.2500	32.8125	-	-
Тимошенко [4]	0.6877	0.5981	5.2500	32.8125	0.3452	0.8631
Ghugal және Sharma [17]	0.6870	0.5980	5.4406	33.0032	1.9253	4.9159

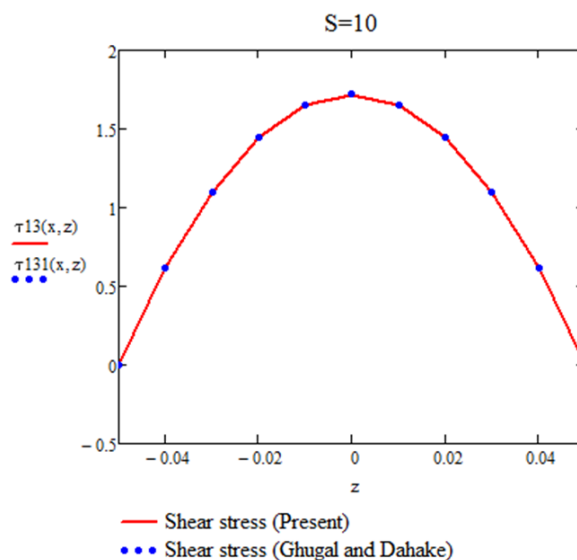
Krishna Murty [6]	0.6867	0.5980	5.4403	33.0029	1.9166	4.7917
Ghugal және Dahake [36]	0.6864	0.5979	5.4517	32.6939	1.9685	5.0646



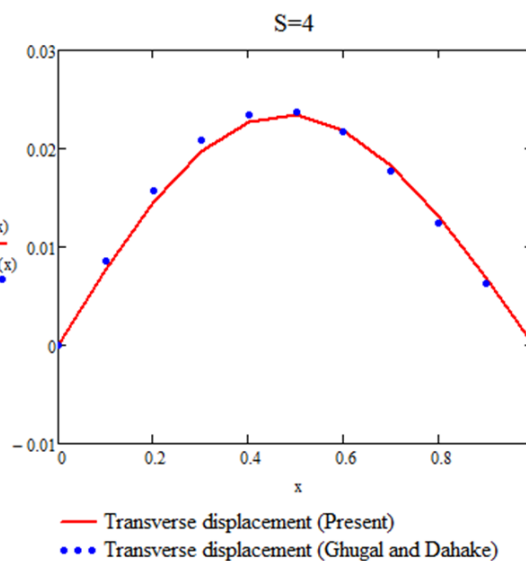
2-Сурет. $S=10$ өлшемдік қатынастағы (3-мысал) өзгермелі жүктеме әсеріндегі шарнирлі тірелген арқалықтың $x=0.251$ нүктесінде қалыңдығы бойымен z координатасына байланысты көлденең жылжуларының (W) өзгеруі.



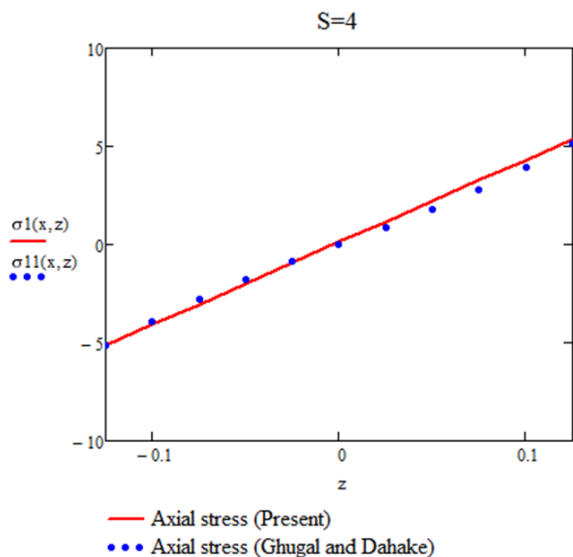
3-Сурет. $S=10$ өлшемдік қатынастағы (3-мысал) өзгермелі жүктеме әсеріндегі шарнирлі тірелген арқалықтың $x=0.251$ нүктесінде қалыңдығы бойымен z координатасына байланысты осьтік кернеудің (σ_1) өзгеруі.



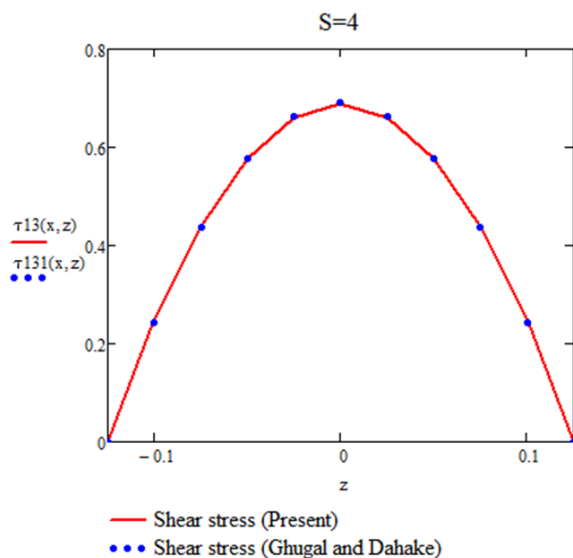
4-Сурет. $S=10$ өлшемдік қатынастағы (3-мысал) өзгермелі жүктеме әсеріндегі шарнирлі тірелген арқалықтың $x=0.251$ нүктесінде қалыңдығы бойымен z координатасына байланысты жанама кернеудің (τ_{13}) өзгеруі.



5-Сурет. $S=4$ өлшемдік қатынастағы (3-мысал) өзгермелі жүктеме әсеріндегі шарнирлі тірелген арқалықтың $x=0.251$ нүктесінде қалыңдығы бойымен z координатасына байланысты көлденең жылжуының (W) өзгеруі.



6-Сурет. $S=4$ өлшемдік қатынастағы (3-мысал) өзгермелі жүктеме әсеріндегі шарнирлі тірелген арқалықтың $x=0.25l$ нүктесінде қалыңдығы бойымен z координатасына байланысты осьтік кернеудің (σ_1) өзгеруі.



7-Сурет. $S=4$ өлшемдік қатынастағы (3-мысал) өзгермелі жүктеме әсеріндегі шарнирлі тірелген арқалықтың $x=0.25l$ нүктесінде қалыңдығы бойымен z координатасына байланысты жанама кернеудің (τ_{13}) өзгеруі.

АРҚАЛЫҚТЫҢ СТАТИКАЛЫҚ ИЛУІНІҢ САНДЫҚ НӘТИЖЕЛЕРІН ТАЛҚЫЛАУ

Бұл бөлімде ығысу деформациясын ескеретін изотропты призмалық тікбұрышты арқалықтардың статикалық илуіне қатысты сандық нәтижелерге талдау жүргізіледі (1-3-мысалдар, 1-7-кестелерде және 2-7-суреттерде келтірілген). Қазіргі заманғы арқалық теориялары бойынша жүргізілген соңғы зерттеулер [44] көлденең ығысу деформациясының әсерін жоғары дәлдікпен ескеретін модельдеу әдістерін жетілдіру қажеттілігін көрсетеді.

1–7 кестелерде өлшемсіз көлденең илу $\bar{W}$, өлшемсіз осьтік кернеу $\bar{\sigma}_1$ және өлшемсіз жанама кернеу $\bar{\tau}_{13}$ үшін сандық нәтижелер келтірілген. 1–7-кестелерде өлшемсіз көлденең илу, өлшемсіз осьтік кернеу және өлшемсіз жанама кернеу үшін сандық нәтижелер келтірілген. Бұл нәтижелер шарнирлі тірелген (SS) және консольді (FC, қатаң бекітілген-еркін) арқалықтарға сәйкес келеді. Алынған сандық нәтижелер негізінде келесі тұжырымдар жасауға болады:

1. 1-3 кестелерде келтірілген шарнирлі тірелген SS арқалықтың (1-мысал) сандық нәтижелерін талдау. Ұсынылған теория бойынша есептелген шарнирлі тірелген (SS) арқалық үшін өлшемсіз көлденең илуді $\bar{W}$ анықтаудағы максималды пайыздық айырмашылық -0.37% ($h/l=0.15$ кезінде), өлшемсіз осьтік кернеуді анықтауда $\bar{\sigma}_1$ - 0.00% ($h/l=0.15$ кезінде), ал өлшемсіз жанама кернеуді анықтауда $\bar{\tau}_{13}$ - 0.00% ($h/l=0.15$ кезінде). Арқалық қалыңдығының оның ұзындығына қатынасының басқа мәндері үшін ($h/l=0.01$, $h/l=0.05$, және $h/l=0.10$), пайыздық айырмашылықтар да өте аз.

2. 4-6 кестелерде келтірілген консольді FC арқалық (2-мысал) сандық нәтижелерін талдау. Ұсынылған теория бойынша есептелген консольді (FC) арқалық үшін өлшемсіз көлденең илуді $\bar{W}$ анықтаудағы максималды пайыздық айырмашылық -0.82% ($h/l=0.15$ кезінде), өлшемсіз осьтік кернеуді анықтауда $\bar{\sigma}_1$ - 0.06% ($h/l=0.15$ кезінде), ал өлшемсіз жанама кернеуді анықтауда $\bar{\tau}_{13}$ - 0.00% ($h/l=0.15$ кезінде). Арқалық қалыңдығының оның ұзындығына қатынасының басқа мәндерінде ($h/l=0.01$, $h/l=0.05$, және $h/l=0.10$), пайыздық айырмашылықтар минималды болып табылады. Бұл шекаралық шарттардың осы түрі жағдайында ығысу деформациясына ұшырайтын арқалықтардың мінез-құлқын сипаттауда ұсынылған теорияның тұрақтылығы мен дәлдігін көрсетеді.

3. Біркелкі емес таралған жүктеме әсеріндегі шарнирлі тірелген SS арқалықтың (3-мысал) нәтижелері. Біркелкі емес таралған жүктеме әсеріндегі шарнирлі тірелген (SS) арқалықтың нәтижелері 7-кестеде және 2-7-суреттерде келтірілген. Ұсынылған теория бойынша есептелген біркелкі емес таралған жүктеме әсеріндегі шарнирлі тірелген (SS) арқалық үшін және $l/h=10$ кезінде кезінде өлшемсіз көлденең жылжу $\bar{W}$, өлшемсіз осьтік кернеу $\bar{\sigma}_1$ және өлшемсіз жанама кернеу $\bar{\tau}_{13}$ үшін максималды пайыздық айырмашылықтар елеусіз. Бұл нәтижелер өзгермелі жүктеме жағдайында арқалықтардың әрекетін болжау кезінде ұсынылған тәсілдің дәлдігі мен сенімділігін көрсетеді. Шарнирлі тірелген (SS) және консольді (FC) арқалықтар үшін ұсынылған теория бойынша алынған нәтижелер серпімділіктің екіпараметрлі теориясы негізінде алынған дәл шешімдермен өте жақсы сәйкес келеді. Бұл сәйкестік жұқа арқалықтар үшін де, ығысу деформациясы ескерілетін арқалықтар үшін де байқалады. Сонымен қатар, ұсынылған теорияның нәтижелері ығысу деформациясы ескерілетін арқалықтар үшін Levinson арқалығының теориясы, бірпараметрлі арқалық теориясы және екіпараметрлі

теория бойынша алынған сәйкес нәтижелермен жақсы үйлеседі.

Ұсынылған теорияның негізгі ерекшелігі – оның көлденең ығысу деформациясын ескеру мүмкіндігі. Бұл көлденең жанама кернеулерді жоғары дәлдікпен анықтауға мүмкіндік береді. Бұл кернеулер арқалықтың қалыңдығы бойынша квадраттық заңдылықпен өзгереді және $z=\pm h/2$ беттеріндегі кернеулердің нөлге тең болу шекаралық шарттарын қанағаттандырады. Бұл классикалық теориялармен, атап айтқанда Bernoulli-Eule және Тимошенко теорияларымен салыстырғанда маңызды артықшылық болып табылады. Өйткені аталған теориялар ығысу деформациясын не ескермейді, не оны жеңілдетілген түрде қарастырады, нәтижесінде кернеулерді анықтау дәлдігі төмендейді. Сонымен қатар, ығысуға түзету коэффициентін қолдану қажеттілігінің болмауына байланысты ұсынылған теория ығысу деформациясына ұшырайтын арқалықтарды талдаудың физикалық тұрғыдан негізделген және сенімді әдісін қамтамасыз етеді [45]. Қорытындылай келе, алынған нәтижелер ұсынылған теорияның әртүрлі жүктемелер мен шекаралық шарттар жағдайында жұқа және қалың арқалықтардың мінез-құлқын жоғары дәлдікпен болжау мүмкіндігін көрсетеді. Бұл нәтижелердің серпімділіктің дәл шешімдерімен және басқа да заманауи арқалық теорияларымен жүргізілген салыстырулар арқылы расталуы ұсынылған тәсілдің сенімділігін және практикалық қолдану тиімділігін дәлелдейді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Ұсынылған арқалықтың иілуінің нақтыланған теориясы классикалық тәсілдермен байланысты мәселелерді шешуде маңызды кадам болып табылады. Көлденең ығысу деформациясының әсерін ескеру және ығысуға түзету коэффициенттерін қолданудан бас тарту арқылы бұл теория жоғары дәлдікті және кең қолдану мүмкіндігін қамтамасыз етеді, әсіресе қалың және ығысу деформациясына бейім арқалықтар үшін. Қарапайым әрі үйлесімді түрде тұжырымдалған негізгі теңдеулер шекаралық шарттарды қанағаттандыратын және әртүрлі жүктеме жағдайларын ескеретін дәл шешімдерді алуға мүмкіндік береді.

Сонымен қатар, қолданыстағы нақтыланған теориялармен және серпімділіктің екіпараметрлі теориясы бойынша алынған шешімдермен жүргізілген салыстырмалы талдау ұсынылған теорияның тиімділігін растайды. Сандық мысалдар оның әртүрлі арқалық конструкциялары үшін, соның ішінде шарнирлі тірелген, қатаң бекітілген және консольді арқалықтар үшін, біркелкі және біркелкі емес жүктемелер жағдайында қолдануға болатындығын көрсетеді. Қарапайымдылық, дәлдік және тәжірибелік тиімділіктің үйлесуі ұсынылған теорияның конструкцияларды модельдеу және инженерлік жобалау үдерістерін жетілдірудегі әлеуетін көрсетеді.

Болашақта бұл тәсілдің икемділігі мен сенімділігі одан әрі зерттеулер жүргізуге мүмкіндік береді. Теорияны күрделі геометриялы арқалықтарға, анизотропты материалдарға және динамикалық жүктемелерге кеңейту оның қолдану аясын едәуір кеңейтіп, теориялық әзірлемелер мен нақты инженерлік қолданбалар арасындағы алшақтықты одан әрі азайтуға мүмкіндік береді.

Болашақ зерттеулер шеңберінде неғұрлым күрделі шекаралық шарттарды теориялық модельге енгізу және теорияны тәжірибелік инженерлік есептерге қолдану жоспарланады. Атап айтқанда, көпқабатты жүйелердегі арқалықтарды есептеу, жылулық жүктемелер, сызықтық емес әсерлер және ақауларды талдау мәселелері қарастырылады. Сонымен қатар, серпімділігі негіздегі арқалықтар зерттеліп, негіздің қаттылығының арқалықтың жұмыс істеу сипатына әсері бағаланады, бұл инженерлік жобалау үшін маңызды нәтижелер алуға мүмкіндік береді.

Соңында, конструкциялық элементтердің жобалау сапасы мен пайдалану тиімділігін арттыру мақсатында теориялық модельге оңтайландыру әдістерін енгізу жоспарланады. Бұл ретте алынған шешімдердің нақты инженерлік жобаларда тәжірибелік қолданылу мүмкіндігі қамтамасыз етіледі.

МУДДЕЛЕР ҚАЙШЫЛЫҒЫ

Авторлар осы зерттеу жұмысын орындау және мақаланы дайындау барысында зерттеу нәтижелеріне ықпал етуі мүмкін қандай да бір жеке, кәсіби немесе қаржылық мүдделер қайшылығының болмағанын мәлімдейді.

АВТОРЛАРДЫҢ ҮЛЕСІ

Авторлар зерттеу жұмысының орындалуына елеулі үлес қосты. Авторлардың үлесі зерттеу тұжырымдамасы мен әдістемесін әзірлеуді, есептік міндеттерді қоюды, теориялық және аналитикалық есептеулер жүргізуді, алынған нәтижелерді талдау мен түсіндіруді, оларды қолданыстағы теориялармен салыстыруды, сондай-ақ мақала мәтінін дайындау және редакциялауды қамтыды. Авторлар мақаланың соңғы нұсқасымен танысып, оны жариялауға мақұлдады.

ҚАРЖЫЛАНДЫРУ

Бұл зерттеу жұмысы арнайы қаржыландырусыз орындалды. Зерттеуді жүргізу және мақаланы дайындау барысында мемлекеттік, коммерциялық немесе өзге де ұйымдар тарапынан қаржылық қолдау көрсетілген жоқ.

АЛҒЫС

Авторлар зерттеу жұмысын орындау барысында көрсеткен ғылыми-әдістемелік қолдауы, құнды кеңестері мен зерттеу нәтижелерін талқылауға қосқан үлесі үшін Ахажанов С.Б.-ға шынайы алғысын білдіреді.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- [1] E. Carrera; G. Giunta, and M. Petrolo, *Beam Structures: Classical and Advanced Theories*. New Delhi, India: A John Wiley and Sons Ltd Publication, 2011, pp. 1-42.
- [2] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, Singapore: Third Int. Ed, 1970

- [3] M. A. Levinson, "New rectangular beam theory," *J. of Sound and Vibration*, vol. 74, pp. 81-87, 1981, [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(81\)90493-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(81)90493-4).
- [4] I.H. Shames, C.L. Dym, *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*. Washington, WA, USA: Hemisphere Publishing Corporation, 1985, pp. 185-204.
- [5] L.W. Rehfield, P.L.N. Murthy, "Toward a new engineering theory of bending: fundamentals," *AIAA J.*, vol. 20, no. 5, pp. 693-699, May. 1982, <https://doi.org/10.2514/3.7938>.
- [6] A.V. Krishna Murty, "Towards a consistent beam theory," *AIAA J.*, vol. 22, no. 6, pp. 811-816, Jun. 1984, <https://doi.org/10.2514/3.8685>.
- [7] M.H. Baluch, A.K. Azad, M.A. Khidir, "Technical theory of beams with normal strain," *ASCE J. of Engineering Mechanics*, vol. 110, no. 8, pp. 1233-1237, Aug. 1984, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1984\)110:8\(1233\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1984)110:8(1233)).
- [8] A. Bhimaraddi, K. Chandrashekhara, "Observations on higher order beam Theory," *ASCE J. of Aerospace Engineering*, vol. 6, no. 4, pp. 408-413, Oct. 1993, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0893-1321\(1993\)6:4\(408\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0893-1321(1993)6:4(408)).
- [9] R.P. Shimpi, R.A. Shetty, A.A. Guha, "Simple Single Variable Shear Deformation Theory for a Rectangular Beam," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 231, pp. 4576-4591, Sept. 2017, <https://doi.org/10.1177/0954406216670682>.
- [10] P.D. Simão, "Influence of Shear Deformations on the Buckling of Columns using the Generalized Beam Theory and Energy Principles," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 61, pp. 216-234, Jan.-Feb. 2017, <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.09.015>.
- [11] J. Kiendl, F. Auricchio, T.J.R. Hughes, A. Reali, "Single-variable Formulations and Isogeometric Discretizations for Shear Deformable Beams," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 284, pp. 988-1004, Feb. 2015, <https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.11.011>.
- [12] K.S. Saoud, P-Le. Grogne, "An Enriched 1D Finite Element for the Buckling Analysis of Sandwich Beam-columns," *Computational Mechanics*, vol. 57, pp. 887-900, Feb. 2016, <https://doi.org/10.1007/s00466-016-1267-1>.
- [13] Y.-M. Xia, S.-R. Li, Z.-Q. Wan, "Bending Solutions of FGM Reddy-Bickford Beams in Terms of Those of the Homogenous Euler-Bernoulli Beams," *Acta Mechanica Sinica*, vol. 32, no.4, pp. 499 – 516, Jun. 2019, <https://doi.org/10.1007/s10338-019-00100-y>.
- [14] S. Chen, R. Geng, W. Li, "Vibration analysis of functionally graded beams using a higher-order shear deformable beam model with rational shear stress distribution" *Composite Structures*, vol. 277, pp. 114586, Dec. 2021, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114586>.
- [15] K. Khorshidi, M. Rezaeisaray, M. Karimi, "Analytical approach to energy harvesting of functionally graded higher-order beams with proof mass," *Acta Mechanica*, vol. 233, no. 20, pp. 4273 – 4293, Sept. 2022, <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03324-1>.
- [16] C.M. Wang, J.N. Reddy, K.H. Lee, *Shear Deformable Beams and Plates*, New York, NY, USA: Relationships with Classical Solutions, Elsevier Science Ltd, 2000, pp. 1-7.
- [17] Y.M. Ghugal, R. Sharma, "A refined shear deformation theory for flexure of thick beams," *Latin Ame. Jl. of Solids and Strucs.*, Vol. 8, no. 2, pp. 183–193, Jun. 2011, <https://doi.org/10.1590/S1679-78252011000200005>.
- [18] Y.M. Ghugal, A.G. Dahake, "Flexure of simply supported thick beams using refined shear deformation theory," *Intl. Jl. of Civ., Envir., Struct., Construct. and Architect. Engg.*, vol. 7, no. 1, pp. 99–108, Jan. 2013,
- [19] A.G. Dahake, Y.M. Ghugal, "A trigonometric shear deformation theory for flexure of thick beam," *Procedia Engg., Elsevier*, vol. 51, no. 8, pp. 1–7, Dec. 2013, <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.01.004>.
- [20] V.A. Jadhav, A.G. Dahake, "Bending analysis of deep beam using refined shear deformation theory," *Intl. Jl. of Engg. Res.*, vol. 5, no. 3, pp. 526–531, Feb. 2016, <https://doi.org/10.17950/ijer/v5i3/003>.
- [21] F.G. Canales, J.L. Mantari, "Boundary discontinuous Fourier analysis of thick beams with clamped and simply supported edges via CUF," *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 30, no. 5, pp. 1708-1718, Jul. 2017, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cja.2017.06.014>.
- [22] Y.M. Ghugal, R.P. Shmipi, "A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams," *Jl. of Reinfor. Plast. and Compos.*, vol. 20, pp. 255–272, Feb. 2001, <https://doi.org/10.1177/073168401772678283>.
- [23] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, "Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature," *Jl. of Compos. Strucs.*, vol. 171, pp. 486–504, Jul. 2017, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.053>.
- [24] R.P. Shimpi, "Refined Plate Theory and Its Variants," *AIAA Journal*, vol. 40, no. 1, pp. 137-146, Jun. 2002, <https://doi.org/10.2514/2.1622>.
- [25] R.P. Shimpi, H.G. Patel, H. Arya, "New First-order Shear Deformation Plate Theories," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 74, pp. 523-533, May. 2007, <https://doi.org/10.1115/1.2916894>.
- [26] N. El Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, E.A. Adda Bedia, "A New Hyperbolic Shear Deformation Theory for Buckling and Vibration of Functionally Graded Sandwich Plate," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, no. 9, pp. 237-247, May. 2011, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.045>.
- [27] T.H. Daoudaji, A.H. Henni, A. Tounsi, E.A. Adda Bedia, "A New Hyperbolic Shear Deformation Theory for Bending Analysis of Functionally Graded Plates," *Modelling and Simulation in Engineering*, vol. 6, pp. 29, Oct. 2012, <http://dx.doi.org/10.1155/2012/159806>.

- [28] T.H. Daouadji, A. Tounsi, E.A. Adda Bedia, "A New Higher Order Shear Deformation Model for Static Behavior of Functionally Graded Plates," *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 5, pp. 351-364, Jan. 2013, <http://dx.doi.org/10.4208/aamm.11-m11176>.
- [29] R.P. Shimpi, P.J. Guruprasad, K.S. Pakhare, "Single Variable New First-order Shear Deformation Theory for Isotropic Plates," *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 15, no. 10, pp. 1-25, Aug. 2018, <https://doi.org/10.1590/1679-78254842>.
- [30] J.N. Reddy, "On Locking-free Shear Deformable Beam Finite Elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 149, pp. 113-132, 1997, [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00075-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00075-3).
- [31] M. Ainsworth, K. Pinchedez, "The hp-MITC Finite Element Method for the Reissner–Mindlin Plate Problem," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 148, no. 2, pp. 429-462, Nov. 2002, [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(02\)00560-5](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(02)00560-5).
- [32] F.G. Canales, J.L. Mantari, "Buckling and Free Vibration of Laminated Beams with Arbitrary Boundary Conditions using a Refined HSDT," *Composites Part B: Engineering*, vol. 100, pp. 136-145, Sept. 2016, <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.06.024>.
- [33] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, N.S. Naik, "Bending Analysis of Laminated Composite and Sandwich Beams According to Refined Trigonometric Beam Theory," *Curved and Layered Structures*, vol. 2, pp. 279-289, Mar. 2015, <https://doi.org/10.1515/cls-2015-0015>.
- [34] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, P.N. Shinde, "Stress Analysis of Laminated Composite and Soft Core Sandwich Beams using a Simple Higher Order Shear Deformation Theory," *Journal of Serbian Society for Computational Mechanics*, vol. 9, no. 1 pp. 15-35, Jan. 2015, <https://doi.org/10.5937/jsscm1501015S>.
- [35] Y. Boutahar, N. Lebaal, D. Bassir, "A Refined Theory for Bending Vibratory Analysis of Thick Functionally Graded Beams," *Mathematics*, vol. 9, no. 12, pp. 1422, Jun. 2021, <https://doi.org/10.3390/math9121422>.
- [36] Y.M. Ghugal, A.G. Dahake, "Flexure of narrow rectangular deep beams with built-in ends," *Journal of Structural Engineering*, vol. 45, no. 6 pp. 497-511, Feb.-Mar. 2019,
- [37] R.P. Shimpi, P.J. Guruprasad, K.S. Pakhare, "Simple Two Variable Refined Theory for Shear Deformable Isotropic Rectangular Beams," *J. Appl. Comput. Mech.*, vol. 6, no. 3, pp. 394-415, Jul. 2020, <http://dx.doi.org/10.22055/JACM.2019.29555.1615>.
- [38] P. Kumar, A. Kumar, "Bending Analysis of Steel-Concrete Composite Beams with Porosity," *Engineering, Technology & Applied Science Research*, vol. 13, no. 4, pp. 11230–11234, Aug. 2023, <https://doi.org/10.48084/etasr.6050>.
- [39] D.T. Hang, N.X. Tung, D.V. Tu, and N.N. Lam, "Finite Element Analysis of a Double Beam connected with Elastic Springs," *Engineering, Technology & Applied Science Research*, vol. 14, no. 1, pp. 12482–12487, Feb. 2023, <https://doi.org/10.48084/etasr.6489>.
- [40] S. Akhazhanov, N. Omarbekova, A. Mergenbekova, G. Zhunussova, D. Abdykeshova, "Analytical solution of beams on elastic foundation," *International Journal of Geomate*, vol. 73, pp. 193–200, Sept. 2020, <https://doi.org/10.21660/2020.73.51487>.
- [41] S.B. Akhazhanov, N.I. Vatin, S. Nkhmediyev, T. Akhazhanov, O. Khabidolda, A. Nurgoziyeva, "Beam on a two-parameter elastic foundation: Simplified finite element model," *Magazine of Civil Engineering*, vol. 121, no. 5, pp. 1–17, Aug. 2023, <https://doi.org/10.34910/MCE.121.7>.
- [42] S. Akhazhanov, B. Bostanov, A. Kaliyev, T. Akhazhanov, A. Mergenbekova, "Simplified method of calculating a beam on a two-parameter elastic foundation," *International Journal of Geomate*, vol. 25, pp. 33-40, Nov. 2023, <https://doi.org/10.21660/2023.111.3898>.
- [43] B. Venkatraman, S.A. Patel, *Structural Mechanics with Introductions to Elasticity and Plasticity*. New York, NY, USA: McGraw-Hill Book Company, 1970, pp. 158-165.
- [44] E. Carrera, A. Pagani, M. Petrolo, E. Zappino, "Recent developments on refined theories for beams with applications," *Mechanical Engineering Reviews*, vol. 2, pp. 14-00298, 2015, <https://doi.org/10.1299/mer.14-00298>.
- [45] H. Gharehbaghi, A. Farrokhabadi, "Analytical, experimental, and numerical evaluation of mechanical properties of a new unit cell with hyperbolic shear deformable beam theory," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 31, no. 25, pp. 6419–6433, 2023, <https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2231441>.